"Duizend criminelen genummerd van 1 tot 1000 worden in een kring geplaatst. Elk derde crimineel wordt terechtgesteld. Aan de laatste twee overblijvers wordt gratie verleend. Welke volgnummers hebben deze twee?"

We gaan iets algemener redeneren, met een willekeurig natuurlijk getal n in plaats van 1000. Als je in de lijst van 1 tot en met n alle drievouden schrapt, blijven er $n - n/3$ over. (Hierbij staat het symbool '/' voor gehele deling: bijvoorbeeld, $5/3 = 1$ en $6/3 = 2$.) De functie $f(n) = n - n/3$ is dus een belangrijke functie in dit verhaal.

In de lijst van overgebleven getallen zullen we nu een volgend rondje gaan schrappen. Belangrijk is evenwel eerst goed te onthouden welk het laatst geschrapt getal was in de pas afgelopen ronde. Er zijn drie gevallen:

Geval 0 is dat n deelbaar is door 3. In dit geval was n het laatst geschrapt getal. In de volgende ronde starten we dan terug bij 1. Het tweede getal in de lijst overgebleven getallen is 2, daarna 4, enzovoort.

Geval 1 is dat $n \bmod 3 = 1$. (Hierbij staat 'mod' voor de rest na gehele deling.) In dit geval was $n - 1$ het laatst geschrapt getal. In de volgende ronde starten we dan bij n in de lijst overgebleven getallen; het tweede element is dan 1 omdat de getallen in een kring staan, het derde 2, enzovoort.

Geval 2 tenslotte is dat $n \bmod 3 = 2$. Nu is $n - 2$ het laatst geschrapt getal en in de volgende ronde starten we bij $n - 1$, dan n, dan 1, enzovoort.

Vooraleer we aan de volgende ronde beginnen gaan we de lijst overgebleven getallen eerst hernummeren in de volgorde waarin de elementen doorlopen zullen worden, zoals hierboven net beschreven. We krijgen dan terug een lijst van opeenvolgende getallen, maar nu van 1 tot $f(n)$. We noteren $f(n)$ voor de eenvoud als n_1. Het is belangrijk het verband te kennen tussen de nieuwe nummers en de oude nummers:

In geval 0 correspondeert een nieuw nummer x met het oude nummer $x+(x-1)/2$. Immers, de nieuwe 1 en 2 komen overeen met de oude 1 en 2; de nieuwe 3 en 4 komen overeen met de oude 4 en 5; de nieuwe 5 en 6 komen overeen met de oude 7 en 8; enzovoort. De functie $g(x) = x + (x - 1)/2$ is dus belangrijk.

In geval 1 starten we niet bij 1 maar bij n, dus een element dat in geval 0 nummer x zou hebben heeft nu nummer $x + 1$, waarbij we $n_1 + 1$ interpreteren als 1 (dit staat bekend als *rekenen modulo* n_1). Anders gezegd, een element dat nummer x heeft in geval 1 heeft nummer $x - 1$ in geval 0. We blijven rekenen modulo n_1, dus als $x - 1$ gelijk is aan nul dan wordt nul geïnterpreteerd als n_1. We besluiten in dit geval dat een nieuw nummer x correspondeert met het oude nummer $g(x - 1)$.

In geval 2 zien we op analoge wijze dat een nieuw nummer x overeenkomt met het oude nummer $g(x - 2)$. Ook hier interpreteren we $x - 2$ modulo n_1, dus 0 wordt n_1 en -1 wordt $n_1 - 1$.

Samenvattend correspondeert een nieuw nummer x met het oude nummer $g(x-(n \bmod 3))$, waarbij zoals gezegd de aftrekking gebeurt modulo $n_1 = f(n)$.

We zijn nu helemaal klaar om de volgende ronde schrappingen uit te voeren, deze keer op een lijst van 1 tot $f(n)$. Als we de oorspronkelijke n noteren als n_0 en de nieuwe n als n_1, dan hebben we dus $n_1 = f(n_0)$. We passen nu precies dezelfde werkwijze toe op de lijst van 1 tot en met n_1. De lijst die daarvan overblijft is dan, na hernummering, de lijst van 1 tot en met n_2 waarbij $n_2 = f(n_1)$.

We blijven dit herhalen tot we nog maar 2 elementjes overhouden. We gaan dus door tot we k schrappingsrondes hebben uitgevoerd waarbij $n_k = 2$. We blijven dan over met getallen 1 en 2. We kunnen nu k maal terugrekenen om de oorspronkelijke volgnummers te vinden waar deze getallen mee overeenkomen. Deze terugrekening kan op volgende wijze gebeuren. We initialiseren de waarden x_k en y_k op 1 en 2. Voor elke i, aftellend van $k-1$ tot 0, berekenen we dan de waarden x_i en y_i door de formules

$$x_i = g(x_{i+1} - (n_i \bmod 3))$$
$$y_i = g(y_{i+1} - (n_i \bmod 3))$$

waarbij de aftrekking gebeurt modulo n_{i+1}. De eindresultaten, x_0 en y_0, zijn de gevraagde twee volgnummers.

Tot zover de theorie. De concrete uitwerking voor het gevraagde geval $n_0 = 1000$ wordt getoond in de tabel. Eerst worden de kolommen voor n_i en n_i mod 3 van boven naar beneden ingevuld; daarna worden de kolommen voor x_i en y_i van onder naar boven ingevuld. Het uiteindelijke antwoord is dat criminelen 226 en 604 gratie ontvangen.

i	n_i	n_i mod 3	x_i	y_i
0	1000	1	226	604
1	667	1	152	404
2	445	1	103	271
3	297	0	70	182
4	198	0	47	122
5	132	0	32	82
6	88	1	22	55
7	59	2	16	38
8	40	1	13	28
9	27	0	10	20
10	18	0	7	14
11	12	0	5	10
12	8	2	4	7
13	6	0	5	1
14	4	1	4	1
15	3	0	1	2
16	2	2	1	2